① Теор о непр зависимости реш ЗК от п.ч и нач. усл. Теор сравн.

$\triangleleft \begin{cases} y' = f_1(t,y) \\ y(t_0) = y_{01} \end{cases}$ и $\begin{cases} y' = f_2(t,y) \\ y(t_0) = y_{02} \end{cases}$ (*) $(t,y) \in Q = \{|t-t_0| \le T, y \in [a,b]\}$

Теор о непр. завис: Пусть в (*) $f_1, f_2 \in C(Q)$ и f_1 удовл усл Липш. по y на Q с конст L. Пусть y_1, y_2 — реш (*) на $|t-t_0| \le T$. Тогда:

$$\max_{|t-t_0| \le T} |y_1(t) - y_2(t)| \le \left(|y_{01} - y_{02}| + T\max_Q |f_1(t,y) - f_2(t,y)|\right) e^{L \cdot T}$$

▷ y_1 и y_2 — решения инт ур-ей:

$$y_1(t) = y_{01} + \int_{t_0}^t f_1(\tau, y_1(\tau))\,d\tau$$
$$y_2(t) = y_{02} + \int_{t_0}^t f_2(\tau, y_2(\tau))\,d\tau$$
$$\Rightarrow |y_1 - y_2| \le |y_{01} - y_{02}| + \left|\int_{t_0}^t |f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))|\,d\tau\right| \le$$

$$\le |y_{01} - y_{02}| + \left|\int_{t_0}^t \underbrace{|f_1(\tau, y_1) - f_1(\tau, y_2)|}_{\le L|y_1 - y_2|}\,d\tau\right| + \left|\int_{t_0}^t \underbrace{|f_1(\tau, y_2) - f_2(\tau, y_2)|}_{\le \max_Q |f_1 - f_2|}\,d\tau\right| \le$$

$$\le |y_{01} - y_{02}| + T\max_Q |f_1 - f_2| + L\left|\int_{t_0}^t |y_1 - y_2|\,d\tau\right|$$ Для $|y_1 - y_2|$ вып все усл леммы Гронуолла-Беллмана $\Rightarrow |y_1 - y_2| \le \left(|y_{01} - y_{02}| + T\max_Q |f_1 - f_2|\right) e^{LT}$ □

$\triangleleft \begin{cases} y' = f_1(t,y) \\ y(t_0) = y_{01} \end{cases}$ и $\begin{cases} y' = f_2(t,y) \\ y(t_0) = y_{02} \end{cases}$ (**) $(t,y) \in Q_+ = \{t \in [t_0, t_0 + T], y \in [a,b]\}$

Лемма 1: Пусть $f(t,y), f'_y(t,y) \in C(Q_+)$, $y(t)$ — реш $y' = f(t,y)$ в Q_+. Тогда:

$$f(t,y_1) - f(t,y_2) = (y_1 - y_2)\int_0^1 f'_y(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2))\,d\theta \quad \text{для } \forall (t,y_1), (t,y_2) \in Q_+$$

▷ $(y_1 - y_2)\int_0^1 f'_y(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2))\,d\theta = \int_0^1 f'_y(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2))\,d(\theta(y_1 - y_2) + y_2) =$
$= f(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2))\Big|_0^1 = f(t,y_1) - f(t,y_2)$ □

Лемма 2: Пусть $p(t), q(t) \in C[a,b]$, $t_0 \in [a,b]$. Тогда общ. реш ур-я $v' = pv + q$ имеет вид: $v = C\cdot\exp\left(\int_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau\right) + \int_{t_0}^t q(\tau)\exp\left(\int_\tau^t p(\xi)\,d\xi\right)d\tau$

▷ $v' - pv = q \quad \Big|\cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau\right)$

$$v'\exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau\right) - pv\exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau\right) = q\exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau\right)$$
$$v\exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau\right) = \int_{t_0}^t q(\tau)\exp\left(-\int_{t_0}^\tau p(\xi)\,d\xi\right)d\tau + C$$
$$v = C\cdot\exp\left(\int_{t_0}^t p(\tau)\,d\tau\right) + \int_{t_0}^t q(\tau)\exp\left(\int_\tau^t p(\xi)\,d\xi\right)d\tau$$ □

Теор сравнения: Пусть в (**) $f_1, f_2, (f_1)'_y \in C(Q_+)$, причем $f_1 \ge f_2$ $\forall (t,y) \in Q$ и $y_{01} \ge y_{02}$. Тогда, если y_1 и y_2 — реш на $[t_0, t_0+T]$ задач с прав. част. f_1 и f_2 соотв, то $y_1 \ge y_2$ $\forall t \in [t_0, t_0+T]$

$$y_1' - y_2' = f_1(t,y_1) - f_2(t,y_2) = \underbrace{f_1(t,y_1) - f(t,y_2)}_{\overset{\text{лем 1}}{=} (y_1-y_2)\underbrace{\int_0^1 (f_1(t,y_2))_y' + \theta(y_1-y_2)\,d\theta}_{\equiv p(t)}} + \overbrace{f_1(t,y_2) - f_2(t,y_2)}^{\geq q(t)}$$

Т.е. $v = y_1 - y_2$ явл реш ЗК:

$$\begin{cases} v'(t) = p(t)v(t) + q(t) \\ v(t_0) = y_{01} - y_{02} \end{cases} \Rightarrow \text{по лем. 2 и с учетом нач усл получ:}$$

$$v = \underbrace{(y_{01} - y_{02})}_{\geq 0} \underbrace{\exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)}_{>0} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{(f_1(\tau,y_2) - f_2(t,y_2))}_{\geq 0} \underbrace{\exp\left(\int_{\tau}^{t} p(\xi)d\xi\right)}_{>0} d\tau \Rightarrow v = y_1 - y_2 \geq 0$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T]$$

② Теор о непр. завис реш ЗК от парам в нач усл и пр. част.

$$\Delta \quad \begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y(\mu) \end{cases} \quad (*) \qquad (t, y, \mu) \in Q_\mu = \{|t - t_0| \le T,\ y \in [a, b],\ \mu \in [\mu_1, \mu_2]\}$$

Теор о непр завис: $\exists$ в $(*)$ $f(t, y, \mu) \in C(Q_\mu)$, $f(t, y, \mu)$ удовл усл Липш. по y с конст L в Q_μ и $y_0(\mu) \in C[\mu_1, \mu_2]$. Тогда, если $y(t, \mu)$ – реш $(*)$ $\forall |t - t_0| \le T$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ то $y(t, \mu)$ непр по μ на $[\mu_1, \mu_2]$

▷ Δ $\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2]$, $\Delta\mu$: $\mu_0 + \Delta\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и ЗК $\begin{cases} y' = f(t, y, \mu_0) \\ y(t_0) = y_0(\mu_0) \end{cases}$ и $\begin{cases} y' = f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu) \\ y(t_0) = y_0(\mu_0 + \Delta\mu) \end{cases}$

Эти ЗК удовл усл теор сравн $\Rightarrow \max\limits_{|t - t_0| \le T} |y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, \mu_0)| \le$

$$\le \left(|y_0(\mu_0 + \Delta\mu) - y_0(\mu_0)| + \max_{\substack{y \in [a, b] \\ |t - t_0| \le T}} T \cdot |f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu) - f(t, y, \mu_0)|\right) e^{L \cdot T}$$

Покажем, что отсюда след непр $y(t, \mu)$ в т μ_0: $\exists \varepsilon > 0$ – произвольн.

Покаж, что $\exists \delta(\varepsilon)$: $\forall t : |t - t_0| \le T$ $|y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, \mu_0)| \le \varepsilon$ при $|\Delta\mu| < \delta(\varepsilon)$

$y_0(\mu)$ непр на $[\mu_1, \mu_2] \Rightarrow$ равн. непр на $[\mu_1, \mu_2] \Rightarrow \exists \delta_1(\varepsilon)$:

$|y_0(\mu_0 + \Delta\mu) - y_0(\mu_0)| \le \varepsilon / 2e^{LT}$ при $|\Delta\mu| \le \delta_1(\varepsilon)$

$f(t, y, \mu) \in C(Q_\mu) \Rightarrow$ равн непр на $Q_\mu \Rightarrow \exists \delta_2(\varepsilon)$: $\forall t : |t - t_0| \le T$, $\forall y \in [a, b]$

$|f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu) - f(t, y, \mu_0)| \le \varepsilon / 2Te^{LT}$ при $|\Delta\mu| \le \delta_2(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ при $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2)$ вып: $|y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, \mu_0)| \le \varepsilon \Rightarrow y(t, \mu)$ непр в т $\mu_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ непр на $[\mu_1, \mu_2]$ в силу произв. μ_0 ◁

③ Теор о диф. по параметру реш 3к

Я $\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0(\mu) \end{cases}$ (*) $\quad (t, y, \mu) \in Q_\mu = \{ |t - t_0| \le T, y \in [a, b], \mu \in [\mu_1, \mu_2] \}$

Теор о диф по парам: Пусть в (*) $f, f'_y, f'_\mu \in C(Q_\mu)$ и $y_0(\mu) \in C^1[\mu_1, \mu_2]$. Тогда, если $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2]$ $y(t, \mu)$ — реш (*) на $[t_0, t_0 + T]$, то $y(t, \mu)$ — диф по μ на $[\mu_1, \mu_2]$

▷ Пусть $\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2]$, $\Delta\mu$: $\mu_0 + \Delta\mu \in [\mu_1, \mu_2]$

Я $$\frac{y'_t(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y'_t(t, \mu_0)}{\Delta\mu} = \frac{f(t, y(t, \mu_0 + \Delta\mu), \mu_0 + \Delta\mu) \overset{\pm f(t, y(t, \mu_0), \mu_0 + \Delta\mu)}{} - f(t, y(t, \mu_0), \mu_0)}{\Delta\mu} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Delta\mu}\left(f(t, y(t, \mu_0 + \Delta\mu), \mu_0 + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu_0), \mu_0 + \Delta\mu)\right)}_{\parallel} + \underbrace{\frac{1}{\Delta\mu}\left(f(t, y(t, \mu_0), \mu_0 + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu_0), \mu_0)\right)}_{= q(t) \xrightarrow[\Delta\mu \to 0]{} f'_\mu(t, y(t, \mu_0), \mu_0)}$$

$$\{\text{лемма 1, билет 1}\} = \underbrace{\frac{y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, \mu_0)}{\Delta\mu}}_{v(t)} \underbrace{\int_0^1 f'_y(t, y(t, \mu_0) + \Theta(y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, \mu_0)), \mu_0 + \Delta\mu)\, d\Theta}_{= p(t) \xrightarrow[\Delta\mu \to 0]{} \int_0^1 f'_y(t, y(t, \mu_0), \mu_0)\, d\Theta = f'_y}$$

$$\Rightarrow v(t) \text{ — реш } \begin{cases} v'(t) = p(t) v(t) + q(t) \\ v(t_0) = \frac{y_0(\mu_0 + \Delta\mu) - y_0(\mu_0)}{\Delta\mu} \end{cases} \Rightarrow \{\text{лемма 2, билет 1}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \Delta\mu \to 0 \\ y'_\mu(t, \mu_0)}}{v(t)} = \underset{\substack{\downarrow \Delta\mu \to 0 \\ y'_{0\mu}(\mu_0)}}{\frac{y(\mu_0 + \Delta\mu) - y(\mu_0)}{\Delta\mu}} \underset{\substack{\downarrow \Delta\mu \to 0 \\ \exp\left(\int_{t_0}^t f'_y(\tau, y(\tau, \mu_0), \mu_0) d\tau\right)}}{\exp\left(\int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau\right)} + \int_{t_0}^t \underset{\substack{\downarrow \Delta\mu \to 0 \\ f'_\mu}}{q(\tau)} \underset{\substack{\downarrow \Delta\mu \to 0 \\ \exp\left(\int_\tau^t f'_y(\xi, y(\xi, \mu_0), \mu_0) d\xi\right)}}{\exp\left(\int_\tau^t p(\xi) d\xi\right)} d\tau$$

Пусть lim п.ч $\Rightarrow$ Пусть lim л.ч

◻

④ Основн. понятия теор устойч по Ляпунову. Теор об ассимпт устойч нулев. реш лин однор сист ОДУ с пост коэф.

Основн задача:

$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y}) \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$ (*) $t \in [t_0, +\infty)$, $\bar{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in C[t_0, +\infty)$; f'_{y_k} непр и огр $\forall t \in [0, +\infty)$, $k = \overline{1,n}$; $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Опр: реш $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ (*) наз уст по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, \bar{y}_0) > 0$: $\forall \hat{\bar{y}}_0 : \|\hat{\bar{y}}_0 - \bar{y}_0\| < \delta \Rightarrow \|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \hat{\bar{y}}_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$, где $\bar{y}(t, \hat{\bar{y}}_0)$ - реш (*) с нач усл $\bar{y}(t_0) = \hat{\bar{y}}_0$

Опр: Реш $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ (*) наз ассимптотически устойч, если:

1) $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ устойчиво по Ляпунову
2) $\exists \delta_1 > 0$: $\forall \hat{\bar{y}}_0 : \|\bar{y}_0 - \hat{\bar{y}}_0\| < \delta \to \lim\limits_{t \to \infty} \|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \hat{\bar{y}}_0)\| = 0$

Лемма 1: Π $A(t) = \{a_{km}(t)\}^n_{k,m=1}$, $a_{km}(t)$ непр и огр на $[0, +\infty)$. Нулев. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ явл

1) Устойч (У), если все реш огр на $[0, +\infty)$
2) Ассимп. уст (АУ), если $\forall$ реш этой сист вып $\|\bar{y}(t)\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

▷ нул реш — реш ЗК: $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(0) = \Theta \end{cases}$ Обозн: $\bar{y}(t, \Theta)$

Π $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \end{cases}$ Обозн $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$. Из 1-й части (конец 20-го билета):

$\bar{y}(t, \bar{y}_0) = Y(t) Y^{-1}(0) \bar{y}_0$, где $Y(t)$ - функцион. матрица. Очев, что $\forall y \in \mathbb{R}^n$:

$|y_{k_0}| \le \|\bar{y}\| \le \sqrt{\sum y_k^2} \le \sqrt{n} |y_{k_0}|$ (**), где y_{k_0} - максим по модулю компон. $\bar{y}$. Аналог, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $|a_{k_0 m_0}| \le \|A\| \le n |a_{k_0 m_0}| \le c$ (#), где $a_{k_0 m_0}$ - макс по мод эл-т A.

1) Т.к. $\forall$ реш огр, то огр все компон (в силу (**)). Тогда в силу (#)

$\|Y\| \le c = const$. $\exists B^* = \|Y^{-1}(0)\|$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon / (2cB^*)$: $\forall \bar{y}_0 : \|\bar{y}_0\| < \delta$ вып $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \Theta)\| = \|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| =$

$= \|Y(t) Y^{-1}(0) \cdot \bar{y}_0\| \le \|Y(t)\| \cdot \|Y^{-1}(0)\| \cdot \|\bar{y}_0\| \le c \cdot B^* \cdot \varepsilon / 2B^* c = \varepsilon / 2 < \varepsilon \quad \forall t \ge 0$

2) $\forall \bar{y}(t)$ - реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ вып $\|\bar{y}\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \Rightarrow$ (т.к. $\|\bar{y}\|$ - непр) $\bar{y}(t)$ - огр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {пункт 1} $\Rightarrow$ нул. реш У

Кроме того, в силу (**) $|y_k| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ $\forall$ реш $\bar{y}(t)$. Тогда в силу (#)

$\|Y(t)\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$. Тогда $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \Theta)\| = \|Y(t) Y^{-1}(0) \bar{y}_0\| \le$

$\le \|Y(t)\| \cdot \underbrace{\|Y^{-1}(0)\| \cdot \|\bar{y}_0\|}_{const} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ нул реш АУ

$\square$

Теор об ассимпт уст: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – с.зн. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (могут повтор). Тогда нул. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ АУ, если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \quad \forall k = \overline{1,n}$

$\triangleright$ Общ. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ имеет вид: $y(t) = \sum C_k \bar{g}_k(t) e^{\lambda_k t}$, где $\bar{g}_k(t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\bar{h}_k^1 + \dots + t\,\bar{h}_k^{\ell-1} + \bar{h}_k^{\ell}$ ($\bar{h}_k^1$ – соб. вект, отв λ_k, $\ell \geq 1$, $\bar{h}_k^p$ – корн. вект, присоед к $\bar{h}_k^1$, $p = \overline{2,\ell}$).

Если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, то $\bar{g}_k(t) e^{\lambda_k t} \to 0$ (по $\|\cdot\|$), т.е все реш $\to 0$ (по $\|\cdot\|$) $\Rightarrow$ {лемма 1} $\Rightarrow$ нул реш АУ.

$\square$

⑤ Теор об уст нул. реш лин однор сист ОДУ с пост коэф. Теор о неуст нул реш. лин однор. сист ОДУ с пост коэф.

Основн задача:

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(t,\bar{y}) \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad (*)$$

$t \in [t_0, +\infty)$, $\bar{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in C[t_0, +\infty)$; f'_{y_k} непр и огр $\forall t \in [0, +\infty)$, $k = \overline{1,n}$; $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Опр: реш $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ $(*)$ наз уст по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, \bar{y}_0) > 0$: $\forall \hat{\bar{y}}_0 : \|\hat{\bar{y}}_0 - \bar{y}_0\| < \delta \Rightarrow \|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \hat{\bar{y}}_0)\| < \varepsilon$ $\forall t \in [t_0, +\infty)$, где $\bar{y}(t, \hat{\bar{y}}_0)$ - реш $(*)$ с нач усл $\bar{y}(t_0) = \hat{\bar{y}}_0$

Лемма 1: Пусть $A(t) = \{a_{km}(t)\}_{k,m=1}^n$, $a_{km}(t)$ непр и огр на $[0, +\infty)$. Нулев. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ явл

1) Устойч (У), если все реш огр на $[0, +\infty)$

2) Неуст (НУ), если у сист $\exists$ хотя бы 1 неогр на $[0, +\infty)$ реш

▷ нул реш — реш ЗК: $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(0) = \Theta \end{cases}$ Обозн: $\bar{y}(t, \Theta)$

Пусть $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \end{cases}$ Обозн $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$. Из 1-й части (конец 20-го билета): $\bar{y}(t, \bar{y}_0) = Y(t) Y^{-1}(0) \bar{y}_0$, где $Y(t)$ - функцион. матрица. Очев, что $\forall y \in \mathbb{R}^n$: $|y_{k_0}| \le \|\bar{y}\| \le \sqrt{\sum y_k^2} \le \sqrt{n} |y_{k_0}|$ $(**)$, где y_{k_0} - максим по модулю компон. $\bar{y}$. Аналог, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $|a_{k_0 m_0}| \le \|A\| \le n |a_{k_0 m_0}| \le c$ $(\#)$, где $a_{k_0 m_0}$ - макс по мод эл-т A.

1) Т.к. $\forall$ реш огр, то огр все компон (в силу $(**)$). Тогда в силу $(\#)$ $\|Y\| \le c = const$. Пусть $B^* = \|Y^{-1}(0)\|$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon / 2cB^*$: $\forall \bar{y}_0$: $\|\bar{y}_0\| < \delta$ вып $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \Theta)\| = \|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| =$
$= \|Y(t) Y^{-1}(0) \bar{y}_0\| \le \|Y(t)\| \cdot \|Y^{-1}(0)\| \cdot \|\bar{y}_0\| \le c \cdot B^* \cdot \varepsilon / 2B^* c = \varepsilon/2 < \varepsilon$ $\forall t \ge 0$

$\Rightarrow$ нул реш У

2) Пусть $\bar{y}^*$ - неогр реш $\bar{y}' = A\bar{y}$. Пусть $b^* = \|\bar{y}^*(0)\|$. В силу неогр $\bar{y}^*(t)$ $\forall \delta > 0$ $\exists t^* > 0$: $\frac{\delta}{2} \frac{1}{b^*} \|\bar{y}^*(t^*)\| > 1$. Пусть $\bar{y}_1(t) = \frac{\delta}{2b^*} \bar{y}^*(t)$

$\exists \varepsilon = 1$: $\forall \delta > 0$ $\exists \bar{y}_1(t)$: $\|\bar{y}_1(0)\| = \frac{\delta}{2} \frac{\|\bar{y}^*(0)\|}{b^*} = \frac{\delta}{2} < \delta$

$\exists t_1^*$: $\|\bar{y}_1(t_1^*)\| = \frac{\delta}{2} \frac{1}{b^*} \|\bar{y}^*(t_1^*)\| > 1 = \varepsilon$ $\Rightarrow$ нул реш НУ ◻

Теор об уст и неуст (2 в 1): Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - с. зн $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (с. зн могут повтор.)

Тогда нул. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$:

1) У, если $Re\lambda_k \le 0$, $k=\overline{1,n}$. $\exists$ с.з.н. с нул действ. ч., причем геом кратн. таких с.з.н. совпад с алгебраич

2) НУ, если:

а) $\exists k : Re\lambda_k > 0$

б) либо $Re\lambda_k \le 0$ $(k=\overline{1,n})$, $\exists k_0 : Re\lambda_0 = 0$, у котор геом кр < алгебр кр

▷ Общ. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ имеет вид: $y(t) = \sum C_k \bar{g}_k(t) e^{\lambda_k t}$, где
$\bar{g}_k(t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \bar{h}_k^1 + \ldots + t\bar{h}_k^{\ell-1} + \bar{h}_k^{\ell}$ ($\bar{h}_k^1$ – соб. вект, отв λ_k, $\ell \ge 1$, $\bar{h}_k^p$ – корн. вект, присоед к $\bar{h}_k^1$, $p=\overline{2,\ell}$).

1) Слаг разбив на 2 группы:

- с множ $e^{\lambda_k t}$, $Re\lambda_k < 0$ – убыв при $t \to \infty$ (т.е, по кр мере, огр)
- вида $\bar{h}_{k_j} e^{i\beta_{k_j} t} = \bar{h}_{k_j}(\cos\beta_{k_j} t + i\sin\beta_{k_j} t)$, где $\bar{h}_{k_j}$ – с.в – огр ф-ции $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по лемме 1 нул реш У.

Докажем, что не АУ:

Δ ф-цию $\bar{h}_{k_j}(\cos\beta_{k_j} t + i\sin\beta_{k_j} t)$.

$\exists\, t_m = \frac{2\pi m}{\beta_{k_j}}$. Тогда $h_{k_j}(\cos\beta_{k_j} t_m + i\sin\beta_{k_j} t_m) = \bar{h}_{k_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} \bar{h}_{k_j}$

$\exists\, \tilde{t}_m = \frac{\pi + 2\pi m}{\beta_{k_j}}$. Тогда $h_{k_j}(\cos\beta_{k_j} t_m + i\sin\beta_{k_j} t_m) = -\bar{h}_{k_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} -\bar{h}_{k_j}$

Т.е $\nexists \lim(\ldots)$ $\Rightarrow$ АУ нет

2) а) $\exists k_0 : Re\lambda_{k_0} > 0$. $\exists$ в $\bar{y}(t)$ все $C_k = 0$, $k \ne k_0$, $C_{k_0} = 1 \Rightarrow \bar{g}^*(t) = \bar{g}_{k_0}(t) \underbrace{e^{\lambda_{k_0} t}}_{\to +\infty} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ неогр реш $\Rightarrow$ {лемма 1} $\Rightarrow$ нул. реш НУ

б) $\exists k_0 : Re\lambda_{k_0} = 0$, но геом кр < алг кр $\Rightarrow \exists$ реш вида $\underbrace{\bar{g}_{k_0}(t)}_{\text{мн. ст} \ge 1} \underbrace{e^{\lambda_{k_0} t}}_{\text{огр}}$ – неогр реш $\Rightarrow$ {лемма 1} $\Rightarrow$ нул реш НУ

$\square$

6) Теор об исслед устойч. реш сист по 1-му приближ (формулир). Примеры

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(\bar{y}) \\ \bar{y}(0) = \Theta \end{cases} \quad (*)$$

$\bar{f} = (f_1(\bar{y}), \dots, f_n(\bar{y}))$ – не завис явн образом от t (автономная сист) $\bar{f}(\Theta) = \Theta$, т.е $\exists!$ реш $\bar{y} = \Theta$

Теор (1-й метод Ляпунова или иссл по 1-му приближ):

$\exists \bar{f}(\bar{y}) \in C^2(\Omega)$, $\Omega = \{\|\bar{y}\| < R\}$. $\measuredangle$ $A = \{a_{km}\}_{k,m=1}^{n}$, $a_{km} = \left.\dfrac{\partial f_k(\bar{y})}{\partial y_m}\right|_{y=\Theta}$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – с зн A. Тогда нул реш $(*)$:

1) АУ, если $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, $k = \overline{1,n}$

2) НУ, если $\exists k_0 : \mathrm{Re}\,\lambda_{k_0} > 0$

Примеры:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 - a y_2 + y_2^4 = f_1(y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - y_1^5 + y_2^3 = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \lambda^2 + \lambda + a \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-4a}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ АУ при $a > 0$, НУ при $a < 0$, метод неприм при $a = 0$

2) $\begin{cases} y_1' = y_2 - y_1^3 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ метод не примен

3) $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_1 + y_1 y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 - y_1^2 - y_2^3 \end{cases}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = 2\lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ метод не примен

7. Исслед уст реш сист на основе ф-ций Ляпунова. Теор об уст. и ассимпт устойч.

Опр: непр в $\Omega = \{\|y\| < R\}$ ф-ция $v(y)$ наз полож опр, если $v(\bar{y}) \geq 0$ $\forall y \in \Omega$ и $v(y) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = 0$

Лемма 1: Пусть $v(\bar{y})$ – полож опр ф-ция в $\Omega = \{\|\bar{y}\| \leq R\}$. Тогда

1) $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists \varepsilon_2 > 0$: $\forall \bar{y} \in \Omega$: $\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow v(\bar{y}_1) \geq \varepsilon_2$

2) $\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists \varepsilon_1 > 0$: $\forall \bar{y} \in \Omega$: $v(\bar{y}) \geq \varepsilon_2 \Rightarrow \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1$

▷ 1) От противн. Пусть $\exists \varepsilon_1 > 0$: $\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists \bar{y} \in \Omega$: $\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1$ но $v(\bar{y}) < \varepsilon_2$. Рассм $\varepsilon_{2_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

$\forall \varepsilon_{2_k}$ $\exists \bar{y}_k$: $\|\bar{y}_k\| \geq \varepsilon_1$, $v(\bar{y}_k) < \varepsilon_{2_k}$

$\bar{y}_k \in \{\varepsilon_1 \leq \|\bar{y}\| \leq R\}$ – замкн. огр мн-во $\Rightarrow \bar{y}_{k_m}$: $\|\bar{y}_{k_m}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} \|\bar{y}_0\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (т.к. $v(\bar{y})$ непр) $v(\bar{y}_{k_m}) \to v(\bar{y}_0) > 0$, т.к. $\bar{y}_0 \neq \Theta$, то $v(y_{k_m}) < \varepsilon_{2_{k_m}} \to 0$ (?!)

2) От противн. Пусть $\exists \varepsilon_2 > 0$: $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists \bar{y} \in \Omega$: $v(\bar{y}) \geq \varepsilon_2$, но $\|\bar{y}\| < \varepsilon_1$.

Рассм $\varepsilon_{1_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. По ε_{1_k} построим $\bar{y}_k$: $\|\bar{y}_k\| \to 0 \Rightarrow \bar{y}_k \to \Theta \Rightarrow$

$\Rightarrow v(\bar{y}_k) \to v(\Theta) = 0$ (т.к v – непр), но $v(\bar{y}_k) \geq \varepsilon_2$ (?!) □

Опр: Пусть $v(\bar{y})$ непр диф в $\Omega = \{\|\bar{y}\| < R\}$. Рассм $\bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y})$ (*)

Производной $v(\bar{y})$ в силу сист ОДУ (*) наз: $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} = \sum \frac{\partial v}{\partial y_k} f_k(t, \bar{y})$

или $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} = \frac{dv(\bar{y}(t))}{dt}$, где $\bar{y}(t)$ – реш (*)

Опр: Непр и полож опр в $\Omega = \{\|\bar{y}\| \leq R\}$ ф-ция $v(\bar{y})$ наз ф-цией Ляпунова для (*), если $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} \leq 0$ $\forall t \geq 0$, $\forall \bar{y} \in \Omega$

Рассм $\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y}) \\ \bar{y}(0) = \Theta \end{cases}$ (**) $\quad t \geq 0$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{f}(t, \Theta) = \Theta$, вып все усл т.о $\exists!$ реш ЗК на всем отрезке

$(**) \Leftrightarrow \bar{y}(t, \Theta) = \Theta$

Теор (про У) Пусть для $\bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y})$ из (**) $\exists$ ф-ция Ляпунова. Тогда реш (**) $\bar{y}(t, \Theta) = \Theta$ – У

▷ От противного: Пусть $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ $\exists \bar{y}_1$: $\|\bar{y}(0, \bar{y}_1) - \bar{y}(0, \Theta)\| = \|\bar{y}_1\| < \delta$

(т.е $\bar{y}(t, \bar{y}_1)$ – реш ЗК $\bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(0) = \bar{y}_1$), но $\exists t^*$: $\|y(t^*, \bar{y}_1) - y(t^*, \Theta)\| \geq \varepsilon_1$

Фиксир t_1^* и выбир соотв. δ_1: вып. вышеуказ. Пусть $v(\bar{y})$ – ф-ция Ляпунова.

Т.к. $v(\bar{y})$ непр и $v(\Theta) = 0$, то $\exists \delta_2$: $\forall \bar{y}$: $\|\bar{y}\| < \delta_2$ вып $v(\bar{y}) < \varepsilon/2$

Пусть $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$. Выберем $\bar{y}_1$: $\|\bar{y}_1\| < \delta_3$. Тогда $v(\bar{y}(0, \bar{y}_1)) = v(\bar{y}_1) < \varepsilon/2$, а $v(\bar{y}(t,\bar{y}_1)) \geq \varepsilon$. Т.е. $v(\bar{y}(t,\bar{y}_1)) - v(\bar{y}(0,\bar{y}_1)) \geq \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$, но $v(\bar{y}(t))$ – ф-ция Ляпунова и не возр на $[0,+\infty)$ (!) $\triangleright$

Теор (про АУ) $\exists$ для $\bar{y}' = \bar{f}(t,\bar{y})$ из $(**)$ $\exists$ ф-ция Ляпунова $v(\bar{y})$, причем $\frac{dv}{dt}\Big|_{(*)} \leq -W(\bar{y})$, где $W(\bar{y})$ – некотор полож. опр ф-ция. Тогда реш $(**)$ $\bar{y}(t,\theta) = \theta$ АУ

$\triangleright$ По теор об У (выше) $\bar{y}(t,\theta) = \theta$ У. Х $\bar{y}_1(t) = \bar{y}(t,\bar{y}_1)$ – реш ЗК: $\bar{y}' = \bar{f}(t,\bar{y})$, $\bar{y}'(0) = \bar{y}_1$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall \bar{y}_1$: $\|\bar{y}_1\| < \delta \Rightarrow \|\bar{y}_1(t)\| < \varepsilon$ $\forall t > 0$

То есть $\exists \delta > 0$: при $\|\bar{y}_1\| < \delta$, $\bar{y}_1(t) \in \Omega = \{\|\bar{y}\| \leq R\}$ $\forall t > 0$

Тогда (т.к. $\frac{dv}{dt}\Big|_{(*)} < 0$) $v(\bar{y}_1(t))$ убыв. Т.к. $v(\bar{y}) \geq 0$ $\exists \lim\limits_{t\to\infty} v(\bar{y}_1(t)) = \alpha \geq 0$.

$\exists \alpha > 0 \Rightarrow \{$лемма 1$\}$ $\exists \alpha_1 > 0$: $\|\bar{y}_1(t)\| \geq \alpha_1 \Rightarrow \{$лемма 1$\} \Rightarrow \exists \beta > 0$: $W(\bar{y}_1(t)) \geq \beta$. $\Rightarrow v(\bar{y}_1(t)) - v(\bar{y}_1(0)) = \frac{dv}{dt}(\bar{y}_1(\xi))(t-0) \leq -W(\bar{y}_1(\xi))\, t \leq$ $\leq -\beta t \longrightarrow -\infty$. Т.к $v(\bar{y}_1(0)) = const$, то $v(\bar{y}_1(t)) \longrightarrow -\infty$ Но $v(\bar{y}) \geq 0$ – (?!) $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow v(\bar{y}_1(t)) \to 0 \Rightarrow \|\bar{y}(t)\| \longrightarrow 0 \Rightarrow$ нул реш АУ $\square$

⑧ Исслед поведения реш сист в окрестн. точек покоя. Классификац. точек покоя

Δ $\overline{y}' = \overline{f}(\overline{y})$ – автономн СДУ, $\exists$: реш опр $\forall t \in \mathbb{R}$ (*)

Опр: Точкой покоя (полож равновесия) сист (*) наз реш этой сист след. вида: $\overline{y}(t) = \overline{y_0} = const$

$\overline{y_0}$ – точка покоя (*) $\Leftrightarrow \overline{f}(\overline{y_0}) = \Theta$ (достат. подставить)

Опр: Точка покоя $\overline{y}(t) = \overline{y_0}$ сист (*) наз грубой, если матрица $\left\{ \frac{\partial f_k}{\partial y_m} \Big|_{\overline{y} = \overline{y_0}} \right\}_{k,m=1}^{n}$ имеет ровно n различ с.зн с $Re \neq 0$

Грубые точки покоя можно иссл на уст с помощью 1-го метода Ляпунова (билет 6), только $A = \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial y_m} \right\}$ нужно выч при $\overline{y} = \overline{y_0}$

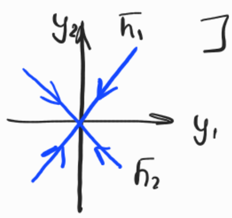
Фазовые траектории $\overline{y}' = \overline{f}(\overline{y})$ в малой окрестн груб точки покоя $\overline{y}(t) = \overline{y_0} = const$ ведут себя так же, как фаз. траектор лин сист $\overline{y}' = A\overline{y}$ $\left(A = \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial y_m} \right\} \Big|_{\overline{y} = \overline{y_0}}\right)$ в окрестн т $\overline{y} = \Theta$

Δ двумерн сл.: $\exists \lambda_1, \lambda_2$ – с.зн матр A

1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $(0 < \lambda_2 < \lambda_1)$: В этой ситуац точка покоя наз узлом (уст при $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ и неуст при $0 < \lambda_1, \lambda_2$). $\exists \lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Общ реш СЛДУ:

$\overline{y}(t) = C_1 \overline{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \overline{h}_2 e^{\lambda_2 t}$, где $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ – соб вект, отв с.зн λ_1, λ_2

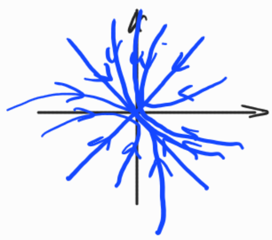
Если $C_1 = 0$, то $\overline{y}(t) = C_2 \overline{h}_2 e^{\lambda_2 t}$ и при t, пробегающ от $+\infty$ до $-\infty$ пробег. точки, распол на луче с нач в нач. коорд, распол на прям, зад $\overline{h}_2$. При разн. знаках C_2 пробег оба луча. Аналог, при $C_2 = 0$



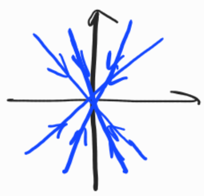
$\exists C_1, C_2 \neq 0$: $y(t) \sim C_2 \overline{h}_2 e^{\lambda_2 t}$ при $t \to +\infty$

$y(t) \sim C_1 \overline{h}_1 e^{\lambda_1 t}$ при $t \to -\infty$

При $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ аналог, но стрелки в противопол. сторону



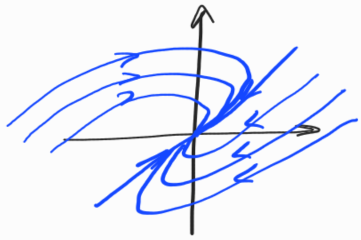
2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ (>0), $\exists$ 2 лнз с.в., отв λ – Дикритический узел (уст (неуст)



$\overline{y}(t) = (C_1 \overline{h}_1 + C_2 \overline{h}_2) e^{\lambda t}$ – общ. реш

$\lambda > 0 \Rightarrow$ стрелки в противоп. сторону

3) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda<0\ (>0)$, есть только 1 св. $\overline{h_1^1}$ и присоед $\overline{h_1^2}$ $\Rightarrow$



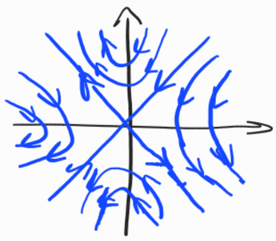
вырожденный узел (уст (неуст))

$\bar y(t)=C_1\overline{h_1^1}e^{\lambda t}+C_2(\overline{h_1^1}+\overline{h_1^2})e^{\lambda t}\sim C_2 t\overline{h_1^1}e^{\lambda t}$

$\lambda>0$ $\Rightarrow$ в противополож сторону

4) $\lambda_1<0<\lambda_2$ $\Rightarrow$ седло (всегда неуст)

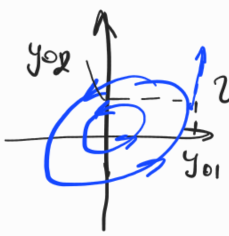
$\bar y(t)=C_1\bar h_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\bar h_2 e^{\lambda_2 t}$



5) $\lambda_{1,2}=\pm iq$ $\Rightarrow$ центр (всегда уст)

$y(t)=C_1\bar s_1\cos qt+C_2\bar s_2\sin qt$

векторы действ.значн. ФСР

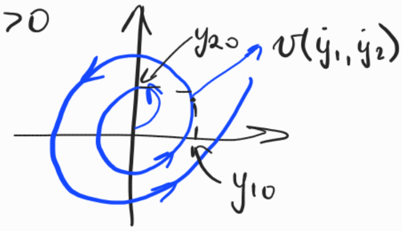


$v(\dot y_1,\dot y_2)\big|_{(y_{01},y_{02})}=A\begin{pmatrix}y_{01}\\y_{02}\end{pmatrix}$

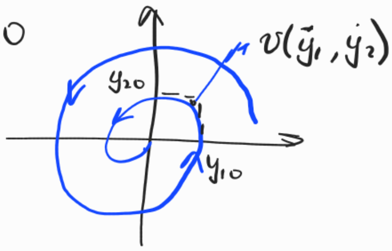
6) $\lambda=p\pm iq$, $p\neq 0$ $\Rightarrow$ фокус

$\bar y(t)=(C_1\bar s_1\cos qt+C_2\bar s_2\sin qt)e^{pt}$

$p>0$



$p<0$



Знак p опр уст/неуст

9) Постановка краев. задачи для лин ОДУ 2-го пор, редук к осн кр. задаче

Опр (не точное): Краевая задача – ЗК, но усл на концах

Опр (точное): Краев задача для ОДУ 2-го порядка:

$$\begin{cases} a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=f_1(x) \\ \alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=u_0 \\ \alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=u_1 \end{cases}$$

$0\le x\le l$

$a_k(x), f_1(x)$ – непр на $[0,l]$ $(*)$

$a_0(x)\neq 0$, $\alpha_k^2+\beta_k^2>0$

Разделим почл на $a_0(x)$, умножим на $p(x)=\exp\left(\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right)$, выделим полн производн, получим: $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=f_2(x)$, $0\le x\le l$ $(**)$

где $p(x)\in C^1[0,l]$, $p(x)>0$, $q(x)=-\frac{p(x)a_2(x)}{a_0(x)}\in C[0,l]$, $f_2(x)=\frac{p(x)f_1(x)}{a_0(x)}\in C[0,l]$

Опр: Краевые условия наз однородн, если $u_0=u_1=0$. Иначе – неоднород

Сведем $(**)$ к кр. задаче с однор краев усл. $\exists\, y(x)$ – реш $(**)$. $\triangle$ $z(x)=y(x)-v(x)$, где $v(x)\in C''$, $v(x)$ удовл кр. усл. Подставим в $(**)$ $y(x)=z(x)+v(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)-q(x)z=f(x),\quad 0\le x\le l \quad (***)$$ – основн краев задача

$\alpha_1 z'(0)+\beta_1 z(0)=0$, $\alpha_2 z'(l)+\beta_2 z(l)=0$, где $f=f_2-\frac{d}{dx}\left(p\cdot\frac{dv}{dx}\right)+qv$

Опр: кр. задача $(***)$ наз однор, если $f(x)=0$. Иначе – неоднород

(10) Тождество Лагранжа, формула Грина, формула для опр Вронского

Введем дифференц оператор $Ly=\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})+q(x)y$

$\exists\, y(x), z(x) \in C^{''}[0,l]$. Тогда можно вычисл Ly и Lz, а также

$z(x)Ly - y(x)Lz = z(x)\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) - y(x)\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dz}{dx})$

Опр: Тождество Лагранжа: $z(x)Ly-y(x)Lz=\frac{d}{dx}[p(x)(z(x)\frac{dy}{dx}-y(x)\frac{dz}{dx})]$

Следствие (формула для опр Вронского): $\exists\, y_1(x), y_2(x)$ — л.н.з реш однор ур-я $Ly=0$, т.е $Ly_1=Ly_2=0$

$\frac{d}{dx}[p(x)(y_1(x)\frac{dy_2}{dx}-y_2(x)\frac{dy_1}{dx})]=0$, $0\le x\le l$ $\Rightarrow$ для опр Вронского:

$W[y_1,y_2](x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$ справедл: $p(x)W[y_1,y_2](x)=c=const$

$0\le x\le l$. Или $W[y_1,y_2](x)=\frac{c}{p(x)}$, $0\le x\le l$

Опр: Формула Грина: инт тожд. Лагранжа от 0 до l:

$\int_0^l(z(x)Ly-y(x)Lz)dx = p(x)(z(x)y'(x)-y(x)z'(x))\Big|_0^l$ — формула Грина

Следствие: покаж, что если $y(x), z(x)$ удовл одним и тем же кр усл (***), то $\int_0^l(z(x)Ly-y(x)Lz)dx=0$:

$\triangleright$ Из форм Грина: достаточно $p(l)(z(l)y'(l)-y(l)z'(l))-p(0)(z(0)y'(0)-y(0)z'(0))=0$

Покаж, что $z(0)y'(0)-y(0)z'(0)=0$ (#)

Если $\alpha_1=0$, то $\beta_1\ne0$, $y(0)=0$, $z(0)=0$ и (#) вып.

$\exists\,\alpha_1\ne0$, $\alpha_1y'(0)+\beta_1y(0)=0$, $\alpha_1z'(0)+\beta_1z(0)=0$. Умножим первое на $z(0)$, второе - на $y(0)$ $\Rightarrow \alpha_1(z(0)y'(0)-y(0)z'(0))=0 \Rightarrow$ (#) вып.

Для l - аналогично

⑪ Ф-ция Грина. Теор о $\exists!$ ф-ции Грина

Δ кр задачу $\begin{cases} Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y'(l) = 0 \end{cases}$ $0 \le x \le l$ (*)

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - изв. ф-ции, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - изв постоян. $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$ $\forall x \in [0,l]$, $q(x), f(x) \in C[0,l]$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = \overline{1,2})$

Опр: ф-ция $y(x)$ наз реш. кр. задачи (*), если $y(x) \in C^2[0,l]$ и удовл (*)

Опр: Ф-ция $G(x,\xi)$ наз ф-цией Грина для кр зад (*), если она опр в $[0,l]^2$ и удовл:

1) $\forall \xi \in [0,l]$ $G(x,\xi)$ дважды непр диф по x на $[0,\xi) \cup (\xi, l]$ и удовл однород ур-ню: $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - q(x)G(x,\xi) = 0$, $0 \le x \le l$, $x \ne \xi$

2) $G(x,\xi)$ удовл однор краев. усл по. x:
$\alpha_1 G'_x(0,\xi) + \beta_1 G(0,\xi) = 0$, $\alpha_2 G'_x(l,\xi) + \beta_2 G(l,\xi) = 0$ $\forall \xi \in (0,l)$

3) $G(x,\xi) \in C([0,l]^2)$, а частн производ $G_x(x,\xi)$ при $x=\xi$ имеет конечн. предельн знач: $G_x(\xi+0,\xi) = \lim\limits_{x\to\xi+0} G_x(x,\xi)$, $G_x(\xi-0,\xi) = \lim\limits_{x\to\xi-0} G_x(0,\xi)$, связан. соотнош: $G_x(\xi+0,\xi) - G_x(\xi-0,\xi) = 1/p(\xi)$ $\forall \xi \in (0,l)$

Теор о $\exists!$ ф-ции Грина: если однород кр. задача $Lv=0$, $\alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0$, $\alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0$ имеет только нул. реш, то ф-ция Грина краевой задачи (*) $\exists!$

▷ ($\exists$): $\exists$ $y_1(x)$ - реш ЗК $\begin{cases} Ly_1 = 0 \\ y_1(0) = -\alpha_1 \\ y_1'(0) = \beta_1 \end{cases}$, $0 \le x \le l$, а $y_2(x)$ - реш ЗК $\begin{cases} Ly_2 = 0 \\ y_2(0) = -\alpha_2 \\ y_2'(0) = \beta_2 \end{cases}$ $0 \le x \le l$

Очев, что $\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0$, $\alpha_2 y_2'(0) + \beta_2 y_2(0) = 0$, y_1, y_2 - л.н.з т.к. иначе однор кр. задача имело бы ненул реш. Будем искать $G(x,\xi)$ в виде: $G(x,\xi) = \begin{cases} C_1(\xi)y_1(x), & 0 \le x \le \xi \\ C_2(\xi)y_2(x), & \xi < x \le l \end{cases}$, где $C_1(\xi), C_2(\xi)$ - неизв ф-ции. Отсюда след, что $G(x,\xi)$ удовл 1), 2) из опр. Возьмем $C_1(\xi), C_2(\xi)$ так, чтоб были вып усл 3). Из непр $G(x,\xi)$ в т $x=\xi$: $C_1(\xi)y_1(\xi) = C_2(\xi)y_2(\xi)$, из усл разрыва $G_x(x,\xi)$ в т $x=\xi$: $C_2(\xi)y_2'(\xi) - C_1(\xi)y_1'(\xi) = 1/p(\xi)$. Решаем и:

$C_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}$, $C_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}$, где $W(\xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)$ - опр Вронского

Из следствия тожд Лагранжа: $W(\xi)p(\xi) = g_0$ - известн. пост. В результате:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0} & 0 \le x \le \xi \\ \frac{y_2(x)y_1(\xi)}{g_0} & \xi < x \le l \end{cases}$$

(!) $\exists\exists$ 2 ф-ции Грина $G(x,\xi)$ и $\hat{G}(x,\xi)$. $\exists$ ξ - $\forall$фиксир точка из $(0,l)$

$\triangleleft$ $z(x) = G(x,\xi) - \hat{G}(x,\xi)$. $z(x) \in C[0,l]$, $z'(x) \in C[0,l]$ т.к. $G_x(x,\xi)$ и $\hat{G}_x(x,\xi)$ имеют в $x=\xi$ одинак разрыв. $Lz=0$, $x \neq \xi \Rightarrow z''(x) = \dfrac{q(x)z(x) - p'(x)z'(x)}{p(x)} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2-я производная непр при $x=\xi$, т.к. её пред знач равны при $x \to \xi \pm 0$ $\Rightarrow z(x)$ явл реш. ур-я также и при $x=\xi$.
$Lz=0$, $0 \le x \le l$ и удовл краев усл (*). По усл однор кр. задача на $[0,l]$ имеет только трив реш $\Rightarrow z(x) \equiv 0 \Rightarrow G(x,\xi) = \hat{G}(x,\xi)$ $\square$

(12) Теор о ∃! реш краев. задачи для неоднор ОДУ.

∢ кр задачу
$$\begin{cases} Ly=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=f(x) \\ \alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=0 \\ \alpha_2 y'(l)+\beta_2 y'(l)=0 \end{cases} \quad 0\le x\le l \qquad (*)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – изв. ф-ции, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ – изв постоян. $p(x)\in C^1[0,l]$, $p(x)>0$ $\forall x\in[0,l]$, $q(x), f(x)\in C[0,l]$, $\alpha_k^2+\beta_k^2>0$ $(k=\overline{1,2})$

Также ∢ однор кр. задачу:
$$\begin{cases} Lv=0 \\ \alpha_1 v'(0)+\beta_1 v(0)=0 \\ \alpha_2 v'(l)+\beta_2 v(l)=0 \end{cases} \quad 0\le x\le l \qquad (**)$$

Теор о ∃! реш если однор кр задача $(**)$ имеет только нул реш, то реш задачи $(*)$ ∃! и задаётся формулой:
$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad 0\le x\le l$$

▷ Из теор о ∃! ф-ции Грина (билет 11): $G(x,\xi)=\begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0\le x\le\xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi<x\le l \end{cases}$

где g_0 – изв. постоян, y_1,y_2 – известн. ф-ции
$$y(x)=\frac{y_2(x)}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{y_1(x)}{g_0}\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi$$
$$y'(x)=\frac{y_2'(x)}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{y_1'(x)}{g_0}\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi$$
Вычислим $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(y_1 y_2'-y_2 y_1')p}{g_0}f+\frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p\cdot\frac{dy_2}{dx}\right)\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_1}{dx}\right)\cdot\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi$

Тк $Ly_1=Ly_2=0$, а $(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')p=g_0$, то
$$Ly=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)-qy=f+\frac{Ly_2}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{Ly_1}{g_0}\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi=f(x)$$
$\Rightarrow y(x)$ – реш. Убедимся в вып кр. усл:
$$\alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=\frac{\alpha_1 y_1'(0)+\beta_1 y_1(0)}{g_0}\int_0^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi=0.$$ Аналогич для втор.

(!) ∃ $\tilde{y}(x)$ – ещё одно реш. Тогда $v=y-\tilde{y}$ – реш однор кр. зад ⇒ ⇒ $v\equiv0\Rightarrow\tilde{y}\equiv y$

□

(13) Задача Штурма-Лиувилля. Теор о св-вах соб знач и соб ф-ций задачи ШЛ

Δ кр задачу: $\begin{cases} Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \end{cases}$ $0 \le x \le l$ (*)

где $p(x), q(x)$ – извести действит ф-ции, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – изв действ постоян: $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$, λ – компл парам. Очев, что $\forall$ знач λ (*) имеет реш $y(x) = 0$

Опр: если для некотор λ_1 краев. задача (*) имеет нетрив реш $y_1(x)$, то λ_1 – собств. знач, $y_1(x)$ – собств ф-ция. Задача поиска с.зн и с ф-ций наз задачей Штурма-Лиувилля

Очев, что соб ф-ции опр с точн. до произвольной пост, т.е если $y(x)$ – соб ф-ция, то $cy(x)$ – тоже соб ф-ция ($c = const \neq 0$)

Теор 1: все с.зн и с ф-ции задачи ШЛ – действит

▷ $\exists \lambda_1$ – с зн, $y_1(x)$ – с. ф-ция. $\exists \lambda_1 = a + ib$, $y_1(x) = u(x) + iv(x)$. $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow Lu = -au(x) + bv(x)$, $Lv = -bu(x) - av(x)$. Тк $y_1(x)$ удовл кр. услов, то $u(x)$ и $v(x)$ удовл кр усл. Умнож ур-я на $v(x)$ и $u(x)$ соответственно проинт. от 0 до l и вычтем из первого второе:
$\int_0^l (v(x)Lu - u(x)Lv)dx = b\int_0^l (u^2(x) + v^2(x))dx \Rightarrow$ {сл из ф. Грина (билет 10)} $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int_0^l (v(x)Lu - u(x)Lv)dx \Rightarrow b\int_0^l (u^2(x) + v^2(x))dx = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \lambda_1$ – действ, $y_1(x)$ – действ. ◻

Теор 2: каждому с зн соотв только одна с. ф-ция

▷ $\exists$ с зн λ соотв двум с ф-циям $y_1(x), y_2(x) \Rightarrow$ они удовл (*). Из 1-го кр усл $\Rightarrow$
$\Rightarrow W[y_1, \dots, y_n](0) = 0$. Тк y_1, y_2 – реш одного и того же лин ОДУ, то $y_2 = cy_1$ ◻

Обозн: Введем скал произв $v(x)$ и $\omega(x)$: $(v, \omega) = \int_0^l v(x)\omega(x)dx$. v, ω – орт, если $= 0$

Теор 3: соб ф-ции, отв различ с зн, явл ортогон

▷ $\exists \lambda_1 \neq \lambda_2$, $y_1(x), y_2(x)$ – соотв соб ф-ции. y_1, y_2 – удовл кр усл $\Rightarrow$ {сл из ф Грина (билет 10)} $\Rightarrow (Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = \int_0^l (y_2 Ly_1 - y_1 Ly_2)dx = 0$
$Ly_1 = -\lambda_1 y_1$, $Ly_2 = -\lambda_2 y_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = (\lambda y_1, \lambda_2) - (y_1, \lambda_2 y_2) = -(Ly_1, y_1) + (y_2, Ly_2) = 0$,
т.е $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow (y_1, y_2) = 0 \Rightarrow$ ортогон

Теор 4: $\exists\, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда если λ - с.зн, y_1 - соотв с ф-ция, то $\lambda \geq \min\limits_{0\leq x\leq l} q(x)$

▷ $\exists\, \lambda_1$ - сзн, y_1 - соотв с ф-ция и $\lambda_1 \leq \min\limits_{0\leq x\leq l} q$. Тогда $q(x) - \lambda_1 \geq 0$ на $[0, l]$. Из $(*)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right) = (-\lambda_1 + q(x))\, y_1(x)$. Интегр от 0 до x:

$p(x)y_1'(x) = p(0)y_1'(0) + \int_0^x (q(s) - \lambda_1)\, y(s)\, ds \quad (**)$

Тк $y_1(x)$ удовл кр. усл, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то $y_1(0) = y_1(l) = 0$. Тк $y_1(x)$ - ненул реш, то $y_1'(0) \neq 0$. $\exists$ для определён $y_1'(0) > 0$. Тогда $y_1'(x) > 0$ при $x \in [0, l]$. $\exists$ это не так. Обозн через x_0 мин. число, при котор $y_1'(x_0) = 0$. Тогда при $x \in [0, x_0)$ $y_1' > 0 \Rightarrow y_1 > 0$ при $x \in (0, x_0)$. Положив в $(**)$ $x = x_0$ и учитыв. $q(x) - \lambda_1 \geq 0$: $y_1'(x_0) > 0$ - ?! $\Rightarrow y_1' > 0$ $\forall x \in [0, l] \Rightarrow y_1 > 0$ $\forall y \in (0, l]$ - ?! кр условию. $y_1(l) = 0$

$\square$

(14) Первые интегралы (ПИ) норм сист ОДУ, производн в силу сист. Теор о представ реш ЗК с помощью функционально независ ПИ.

Δ сист ОДУ n-го порядка:

$$\begin{cases} (x_1)'_t = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ (x_n)'_t = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (*)$$

, где $f_k(t, \bar{x})$ непр в $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ вместе со всеми част. пр $(f_m)'_{x_k}$, $k, m = \overline{1, n}$

Опр: первым инт сист $(*)$ в обл D_1 наз φ-ция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$, сохран постоян знач вдоль кажд леж в D_1 инт кривой $(*)$

Таким обр, $\forall$ реш $\bar{x}(t) = (x_1, \dots, x_n)$ сист $(*)$ $\exists\, C = const$: $v(t, x_1, \dots, x_n) \equiv C$

Опр: Производной φ-ции $v(t, \bar{x}) \in C^1(D_1)$ в силу сист $(*)$ наз φ-ция $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} = v'_t(t, \bar{x}) + \sum v'_{x_k}(t, \bar{x}) \cdot f_k(t, \bar{x}) \quad (t, \bar{x}) \in D_1$

Лемма 1: φ-ция $v(t, \bar{x}) \in C^1(D_1)$ явл первым инт $(*)$ в D_1 $\Leftrightarrow$ её произв в силу сист $(*) = 0$ в D_1: $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} = 0 \quad \forall (t, \bar{x}) \in D_1$

▷ $(\Rightarrow)$: $\exists v(t, \bar{x}) \in C^1(D_1)$ явл ПИ для $(*)$ в D_1. Тогда на лежащ в D_1 инт кривой $(t, \bar{x})$, где $\bar{x}$ - реш $(*)$ справедл: $v(t, \bar{x}) \equiv C$. Диф почл. по t и подстав выраж для произв. $(*)$ имеем: $0 \equiv v'_t + \sum v'_{x_k} f_k(t, \bar{x})$

Таким обр, производ в силу $(*) = 0$ вдоль инт крив. Тк через $\forall$т $(t_0, \bar{x}_0) \in D_1$ по теор о $\exists!$ реш ЗК для норм сист с нач усл $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ проходит ! инт крив, то $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} = 0 \quad \forall (t, \bar{x}) \in D_1$

$(\Leftarrow)$ $\exists$ для некот φ-ции $v(t, \bar{x}) \in C^1(D_1)$, $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} = 0 \quad \forall (t, \bar{x}) \in D_1$. Тогда:

$0 \equiv v'_t + \sum v'_{x_k} f_k(t, \bar{x}) = v'_t + \sum v'_{x_k} (x_k)'_t = \frac{d}{dt}(v(t, \bar{x}))$. Производ непр диф φ-ции $v(t, \bar{x})$ скаляр аргум t равна 0, только когда конст, т.е $v(t, \bar{x}) \equiv C \Rightarrow v(t, \bar{x})$ — ПИ $(*)$ ◁

Геом смысл: определяет в $\mathbb{R}^{n+1}$ n-мерн пов, целиком сост из инт крив сист

Замеч: $\exists\, v_1(t, \bar{x}), \dots, v_n(t, \bar{x})$ - ПИ $(*)$. Тогда $\forall$ непр диф в $\mathbb{R}^k$ φ-ции $\varphi(y_1, \dots, y_k)$ суперпоз $\Phi(t, \bar{x}) = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ также явл ПИ $(*)$

Опр: ПИ $v_1, \dots, v_n$ сист $(*)$ наз функционально независ в D_1, если ранг матр производн равен кол-ву φ-ций n: $rg\left(\left(v_k(t, \bar{x})\right)'_{x_m}\right) = n \quad \forall (t, \bar{x}) \in D_1$

Теор 1: $\exists$ в D_1 $\exists$ n функц незав ПИ $v_1, \dots, v_n$ сист $(*)$. Тогда $\forall$т $(t_0, \bar{x}_0) \in D_1$ реш $\bar{x}(t) = (x_1, \dots, x_n)$ ЗК $(x_k)'_t = f_k(t, \bar{x})$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ одноз опр как неявн φ-ция из сист:

$$\begin{cases} u_1(t, \bar{x}) = C_1^0 \\ u_n(t, \bar{x}) = C_n^0 \end{cases} \quad (**)$$

, где $C_k^0 = v_k(t_0, \bar{x}_0)$, $k = \overline{1, n}$

▷ Δ сист (**) в окр т $(t_0, \overline{x_0})$. В самой т ур-е очевидно удовл, причём в силу функц независ ПИ якобиан по $(x_1, \dots, x_n)$ $\det\left((v_k(t_0, \overline{x_0}))'_{x_k}\right) \neq 0$. Тогда по теор о неявн ф-циях в нек окр т t_0 $\exists$ непр дифф ф-ции $x_k(t) = g_k(t, C_1^0, \dots, C_n^0)$ $k = \overline{1,n}$: при подстан $\overline{g}(t) = (g_1, \dots, g_n)$ в (**) получ тожд:

$$\begin{cases} v_1(t, \overline{g}) = C_1^0 \\ \dots \\ v_n(t, \overline{g}) = C_n^0 \end{cases}$$

Пусть $\overline{x}$ - реш ЗК $(x_k)'_t = f_k(t, \overline{x})$, $\overline{x}(t_0) = \overline{x_0}$. По опр ПИ имеем:

$v_k(t, \overline{x}) = v_k(t_0, \overline{x}(t_0)) = v_k(t_0, \overline{x_0}) = C_k^0$

Таким обр, $\overline{x}$ удовл той же самой сист функц. ур-ей, что и $\overline{g}(t)$.
В силу единств. неявн ф-ции в окр t_0: $\overline{x} \equiv \overline{g}$ □

Теор 2: в случ автоном сист (*), т.е $f_k = f_k(\overline{x})$ в окр $\forall$ т $\overline{x_0}$, для которой $\sum f_k^2(0) \neq 0$. $\exists$ ровно $(n-1)$ не содерж перемен t функционально независ ПИ (*).

15 Лин. однор ур-е в частн. произв. 1-го порядка. Связь реш. с ПИ. Теор. об общ. реш

Опр: $\exists u(\overline{x})$ – ф-ция от $\overline{x}=(x_1,\dots,x_n)\in D_0\subset\mathbb{R}^n$. Ур-е $F(x_1,\dots,x_n,u,u'_{x_1},\dots,u'_{x_n})=0$ наз ур-ем в частн производ 1-го порядка, если $F(\overline{x},u,u'_{x_1},\dots,u'_{x_n})$ существенно завис от $u'_{x_1},\dots,u'_{x_n}$

Опр: УЧП 1-го порядка наз квазилинейным, если в это ур-е частн. производн. входят линейно, т-е $\sum a_k(\overline{x},u(\overline{x}))u'_{x_k}=b(\overline{x},u(\overline{x}))$, где $a_k(\overline{x},u(\overline{x}))$ и $b(\overline{x},u(\overline{x}))$ считаются заданными на некотор мн-ве $D_1\subset\mathbb{R}^{n+1}$, причём всюду в D_1 $\sum a_k^2\neq 0$

Опр: УЧП 1-го пор наз лин. однор., если коэф. не завис от u, а п.ч $=0$: $\sum a_k(\overline{x})u'_{x_k}=0$, где a_k задано на некотор $D_0\subset\mathbb{R}^n$, причем всюду в D_0 вып: $\sum a_k^2\neq 0$

Очев, что лин однор УЧП – частн случ квазилин УЧП

Опр: Ф-ция $u(\overline{x})$ наз реш квазилин УЧП 1-го порядка в $D_0\subseteq\mathbb{R}^n$, если:

1) $u(\overline{x})\in C^1(D_0)$
2) $\forall\overline{x}\in D_0$: $(\overline{x},u(\overline{x}))\in D_1$
3) При подстан ф-ции в обе части квазилин получ тождество в D_0

$\exists$ лин однор УЧП 1-го пор в $D_0\subset\mathbb{R}^n$: $a_1(\overline{x})u'_{x_1}+\dots+a_n(x)u'_{x_n}=0$, $a_k\in C^1(D_0)$, $\sum a_k^2\neq 0$ (*) По коэф. (*) построим сист ОДУ n-го пор:

$$\begin{cases}(x_1)'_t=a_1(\overline{x})\\ \dots\\ (x_n)'_t=a_n(\overline{x})\end{cases}\quad (**)$$

Опр: решения $\overline{x}=(x_1,\dots,x_n)$ сист (**) определяют фаз кривые в $\mathbb{R}^n$, котор наз характеристиками УЧП (*)

Лемма 1: ф-ция $u(\overline{x})\in C^1(D_0)$ явл реш лин однор УЧП (*) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $u(\overline{x})$ – не содерж t ПИ сист (**)

▷ ($\Leftarrow$) $\exists u(\overline{x})$ – не сод. t ПИ сист (**) в D_0. По лемме 2 его производ в силу сист (**) равна 0 в D_0:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{(*)}=\sum u'_{x_k}a_k=0\quad\forall x\in D_0\Rightarrow u\text{ – реш УЧП (*)}$$

($\Rightarrow$) $\exists u$ – реш УЧП (*). Тогда л.ч представ. собой выраж для произв u в силу сист (**). и $=0$ в D_0. Тогда по лемме 2: u – ПИ (**) в D_0. □

Лемма 2: ф-ция $v(t,\bar{x}) \in C^1(\mathcal{D}_1)$ явл ПИ $(**)$ в $\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow$ её производ в силу $(**)$ $=0$ в $\mathcal{D}_1$: $\frac{dv}{dt}\Big|_{(**)} = 0 \quad \forall (t,\bar{x}) \in \mathcal{D}_1$

Теор 1: $\exists$ в $\mathcal{D}_0$ $(**)$ имеет ровно $(n-1)$ не содерж t функц. независ ПИ $v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})$. Тогда в некот окрест произв.ол т $M_0(\bar{x}^0) \in \mathcal{D}_0$ общ реш лин однор УЧП $(*)$ имеет вид: $u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), \dots, v_n(\bar{x}))$ $(***)$, где $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ – произвольн непр диф. ф-ция

$\triangleright$ Если $v_k(\bar{x})$ – ПИ $(**)$ $k=\overline{1,n-1}$, то для $\forall$ непр диф $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ ф-ция $u(\bar{x})$, определяем. формулой $(***)$ также ПИ, не завис от t. Тогда по лемме 1: $u(\bar{x})$ – реш лин УЧП $(*)$. Убедимся, что $(***)$ опис все реш $(*)$ в окр кажд т. $M_0(\bar{x}^0) \in \mathcal{D}_0$. $\exists u(\bar{x})$ – произвольн. фикс реш ур-я $(***)$. Тк $v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})$ – ПИ $(**)$, то по лемме 1 они реш $(*)$
То есть:

$$\begin{cases} \sum a_k u'_{x_k} = 0 & \forall \bar{x} \in \mathcal{D}_0 \\ \sum a_k (v_1)'_{x_k} = 0 & (\#) \\ \dots \\ \sum a_k (v_{n-1})'_{x_k} = 0 \end{cases}$$

В силу усл (1) в $\forall$ т $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$ сист $(\#)$ представ собой имеющ нетрив реш $a_1(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x})$ однор СЛАУ. Тогда определит этой сист, представ. собой опр функционал. матр $=0$:
$\frac{\mathcal{D}(u, v_1, \dots, v_{n-1})}{\mathcal{D}(\bar{x})} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_0$ При этом в силу функц. независ $v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})$ соотв. минор порядка $(n-1)$ отлич от 0. Тогда по теор о функц. матр. в окрестн кажд т M_0 $\exists$ непр диф ф-ция $F(y_1, \dots, y_{n-1})$: в окр M_0 справедливо $(***)$ $\triangleleft$

(16) Квазилин. ур-е в частн. произв 1-го пор. Характеристики. Теор о неявном определении реш через ПИ.

Опр: УЧП 1-го порядка наз квазилинейным, если в это ур-е частн. производн. входят линейно, т-е $\sum a_k(\overline{x}, u(\overline{x}))u'_{x_k} = b(\overline{x}, u(\overline{x}))$, где $a_k(\overline{x}, u(\overline{x}))$ и $b(\overline{x}, u(\overline{x}))$ считаются заданными на некотор мн-ве $D, \subset \mathbb{R}^{n+1}$, причём всюду в D, $\sum a_k^2 \neq 0$

Д квазилин УЧП 1-го пор в $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: $\sum a_k(\overline{x}, u(\overline{x}))u'_{x_k} = b(\overline{x}, u(\overline{x}))$, (*)
$a_k(\overline{x}, u), b(\overline{x}, u) \in C^1(D)$, $k=\overline{1,n}$, $\sum a_k^2 \neq 0$ $\forall \overline{x} \in D$. По коэф в (*) постр СДУ n+1-го:

$$\begin{cases} (x_1)'_t = a_1(\overline{x}, u) \\ \dots \\ (x_n)'_t = a_n(\overline{x}, u) \\ u'_t = b(\overline{x}, u) \end{cases} \quad (**)$$

Опр: реш $(\overline{x}, u)$ сист (**) опр, фаз кривые в $\mathbb{R}^{n+1}$, котор называются характеристиками УЧП (*)

Теор 1: $\exists v(\overline{x}, u)$ – не содерж t ПИ сист (**) в D, и в некот т $N_0(\overline{x}^0) \in D$ выполн усл: $v(N_0) = C_0$, $\frac{\partial v(N_0)}{\partial u} \neq 0$. Тогда в некотор окр т N_0 ур-е $v(\overline{x}, u) = C_0$ определяет неявн. ф-цию $u = u(\overline{x})$, явл квазилин ур-я (*)

▷ $\exists v(\overline{x}, u)$ – не содерж t ПИ сист (**). Тогда по лемме 1 его производ в силу сист равна 0 вобл D:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(**)} = \sum \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial x_k} a_k(\overline{x}, u) + \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial u} b(\overline{x}, u) = 0 \quad \forall \overline{x} \in D \quad (***)$$

Для функц ур-я $v(\overline{x}, u) = C_0$ в силу $v(N_0) = C_0$, $\frac{\partial v(N_0)}{\partial u} \neq 0$ по теор о неявн ф-ции $\exists$ окрест т $M_0(\overline{x}^0)$, в котор опр непр диф ф-ция $u = u(\overline{x})$, обращ ур-е $v(\overline{x}, u) = C_0$ в тождество в этой окрест:
$v(\overline{x}, u(\overline{x})) \equiv C_0$. По формуле диф неявн ф-ции: $\frac{\partial v}{\partial x_k} = -\frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}$
После подстан этих р-в в (***) и деления на $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$ получаем:
$\sum a_k(\overline{x}, u(\overline{x}))u'_{x_k} = b(\overline{x}, u(\overline{x}))$ в рассматр окрест т M_0. То есть, $u(\overline{x})$ – реш квазилин УЧП (*) □

(17) Квазилин. ур-е в частн. произв 1-го пор. Теор о необход и достат услов для реш ур-я

Опр: УЧП 1-го порядка наз квазилинейным, если в это ур-е частн. производн. входят линейно, т.е $\sum a_k(\bar{x}, u(\bar{x}))u'_{x_k} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$, где $a_k(\bar{x}, u(\bar{x}))$ и $b(\bar{x}, u(\bar{x}))$ считаются заданными на некотор мн-ве $D, \subset \mathbb{R}^{n+1}$, причём всюду в D, $\sum a_k^2 \neq 0$

Δ квазилин УЧП 1-го пор в $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: $\sum a_k(\bar{x}, u(\bar{x}))u'_{x_k} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$, (*)

$a_k(\bar{x}, u), b(\bar{x}, u) \in C^1(D)$, $k = \overline{1,n}$, $\sum a_k^2 \neq 0$ $\forall \bar{x} \in D$. По коэф в (*) постр СДУ n+1-го:

$$\begin{cases} (x_1)'_t = a_1(\bar{x}, u) \\ \dots \\ (x_n)'_t = a_n(\bar{x}, u) \\ u'_t = b(\bar{x}, u) \end{cases} \quad (**)$$

Опр: реш $(\bar{x}, u)$ сист (**) опр, фаз кривые в $\mathbb{R}^{n+1}$, котор называются характеристиками УЧП (*)

Теор о необх и дост условии: ф-ция $u = f(\bar{x}) \in C^1(D_0)$ явл реш квазилин УЧП (*) $\Leftrightarrow$ задаваемая этой ф-цией поверхность целиком состоит из характеристик, опр системой (**) (т.е через $\forall$ т. поверхности проходит характеристика, целиком леж на этой поверхн)

▷ ($\Leftarrow$) Π через $\forall$ т. поверхн. $P = \{u = f(\bar{x}), \bar{x} \in D_0\}$, задаваемой с помощью некотор ф-ции $f(\bar{x}) \in C^1(D_0)$ проход характер. $\Gamma = \{(\bar{x}(t), u(t)\} \subset P$, целиком леж на этой поверхн. В кажд т. поверх её кас вектор в силу (**) имеет вид: $\bar{\tau} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt}\right) = (a_1(\bar{x}(t), u(t)), \dots, a_n(\bar{x}(t), u(t)), b(\bar{x}(t), u(t)))$, где $u(t) = f(\bar{x}(t))$. Т.к. характер. лежит на поверхн. P, то $\bar{\tau}$ - кас вект к поверх P. Тогда этот вект ортогон к вект нормали:

$\bar{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}(t)), -1\right)$. Т.к. $(\bar{\tau}, \bar{n}) = 0$, то:

$a_1(\bar{x}, u)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) + \dots + a_n(\bar{x}, u)\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) - b(\bar{x}, u) = 0$ $\forall (\bar{x}, u) \in \Gamma$. $\Rightarrow u = f(\bar{x})$ удовл квазилин УЧП (*) в кажд т. хар. Γ. По усл через кажд т P. проход нек хар $\Rightarrow$ (*) вып. во всех т. D_0

($\Rightarrow$) Π $u = f(x)$ - реш квазилин УЧП (*) в D_0. Покажем, что через $\forall$ т. $M_0(\bar{x}^0, u^0) \in P$ проход лежащ в P характ с кас вектором

$\overline{\tau}(\overline{x}^0, u^0)$. $\exists$ ЗК $\begin{cases} (x_1)'_t = a_1(\overline{x}, f(\overline{x})) & , x_1(t_0) = x_1^0 \\ \dots & \dots \\ (x_n)'_t = a_n(\overline{x}, f(\overline{x})) & , x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$ котор имеет

! реш $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

По этому реш постр. кривую $\Gamma = \{(x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), u(t) = f(\overline{x}))\}$.

$\Gamma \subset P$ по постр. Убедимся, что Γ - характ, т.е удовл (**).

Первые n ур-ий сист вып в силу ЗК. Учитывая, что $x_k(t)$

явл реш ЗК, а $u = f(x)$ явл реш (*):

$\frac{du}{dt} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x}(t)) \cdot \frac{dx_k}{dt}(t) = \sum \frac{\partial f(\overline{x}(t))}{\partial x_k} a_k(\overline{x}, u) = b(\overline{x}, u) \Rightarrow \Gamma$ - характер.

$\square$

(18) Функционалы, примеры. Вариация функционала. Необход условие экстремума функционала. Основ. лемма вариац. счисл.

Δ мн-во M: подмн-во некот мн-ва непр на отр ф-ций $C[x_0, x_1]$

Опр: Функционал: отобр $M \to \mathbb{R}$

Примеры:

1) $M = C[x_0, x_1]$ $\Phi_1[y(x)] = y(x_0) + 2y(x_1)$, $\Phi_2[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx$

2) $M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ $\Phi_1[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(y(x) + 2(y'(x))^2 dx$

Опр: Допустимой вариац. ф-ции $y_0(x) \in M$ наз $\forall$ ф-ция $\delta y(x)$: $y_0(x) + \delta y(x) \in M$. Для простот: мн-во M облад тем св-вом, что если $\delta y(x)$ - допустим. вариац ф-ции $y_0(x)$, то $t\delta y(x)$ - также допустим вариац $y_0(x)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Опр: вариац. $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на ф-ции $y_0(x) \in M$ наз $\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}$

Примеры:

3) $M = C[x_0, x_1]$ $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)dx$

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1}[y_0(x) + t\delta y(x)]^2 dx\Big|_{t=0} =$$
$$= 2\int_{x_0}^{x_1} y_0(x)\delta y(x)dx \quad \exists \forall y_0(x)$$

Опр: Функционал $\Phi[y(x)]$ достиг на ф-ции $y_0(x) \in M$ глобал мин (макс) на M, если $\forall y(x) \in M$ вып: $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)]$)

$\exists$ на M введена норма $y(x)$. Напр $\|y(x)\| = \max\limits_{[x_0, x_1]}|y(x)|$

Опр: Функционал $\Phi[y(x)]$ достиг на $y_0(x) \in M$ лок min (max) на M, если $\exists \varepsilon > 0$: $\forall y(x) \in M$ вып: $\|y(x) - y(x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\geq$)

Опр: max и min функц наз экстремумами. Задачи отыск экстрем. функций и функционалов наз задачами вариац. исчисл

Теор о необход усл экстр: если функцион $\Phi[y(x)]$ достиг на $y \in M$ лок max или min на M и вариация функц. для $y_0(x)$ $\exists$, то вариац. функц. $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равно 0 для $\forall$ допустим вар $y(x)$

D $\exists \Phi[y(x)]$ дост на $y_0(x)$ lok extr. Δ $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ - произв вар $y_0(x)$. При фикс $y_0(x)$ и $y(x)$ функц. $\Phi[y_0(t) + t\delta y(x)]$ явл ф-цией от t: $\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$.

Тк функц. $\Phi[y(x)]$ дост на $y_0(x)$ loc extr, то у $\varphi(t)$ точка $t=0$ явл т. loc extr $\Rightarrow$ если $\exists \varphi'(0)$, то $\varphi'(0)=0$. $\varphi'(0)$ сущ. тк. $\exists$ вар. функц. $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$: $\frac{d}{dt}\varphi(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x)+t\delta y(x)]\big|_{t=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x)+t\delta y(x)]\big|_{t=0} = 0 \quad \forall \delta y(x)$ $\square$

Опр: $\exists C_0^n[x_0, x_1] = \{y(x) \in C^n[x_0, x_1] : y^{(m)}(x_0) = y^{(m)}(x_1) = 0,\ m = \overline{0, n-1}\}$

Осн лемма вар. исчисл: $\exists f(x) \in C[x_0, x_1]$, $\int_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)dx = 0$ $\forall y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) \equiv 0$ на $[x_0, x_1]$

$\triangleright$ $\exists f(x) \not\equiv 0$ на $[x_0, x_1]$. Тогда $\exists x_2 \in (x_0, x_1)$: $f(x_2) \neq 0$. $\exists f(x_2) > 0$. $f(x) \in C[x_1, x_2] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $f(x) \geq \frac{f(x_2)}{2} > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (x_0, x_1)$.

$$\text{Д } y_2(x) = \begin{cases} (x-(x_2-\varepsilon))^{n+1}((x_2+\varepsilon)-x)^{n+1}, & x \in [x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \\ 0, & x \notin [x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \end{cases} \in C_0^n[x_{10}, x_1] \text{ и } y_2(x) > 0$$

при $x \in (x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon) \Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)y_2(x)dx = \int_{x_2-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon} f(x)y_2(x)dx > 0$?! $\triangleleft$

(19) Теор о необх усл экстр. для функционала, завис от 1-й произв. Ур-е Эйлера

Опр: Функционал: отобр $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$

Опр: Допустимой вариац. ф-ции $y_0(x) \in \mathcal{M}$ наз $\forall$ ф-ция $\delta y(x)$: $y_0(x) + \delta y(x) \in \mathcal{M}$. Для простот: мн-во $\mathcal{M}$ облад тем св-вом, что если $\delta y(x)$ - допустим. вариац ф-ции $y_0(x)$, то $t\delta y(x)$ - также допустим вариац $y_0(x)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Опр: вариац. $\delta \Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на ф-ции $y_0(x) \in \mathcal{M}$ наз $\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\big|_{t=0}$

Опр: Функционал $\Phi[y(x)]$ достиг на ф-ции $y_0(x) \in \mathcal{M}$ глобал мин (макс) на $\mathcal{M}$, если $\forall y(x) \in \mathcal{M}$ вып: $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ $(\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)])$

] на $\mathcal{M}$ введена норма $y(x)$. Напр $\|y(x)\| = \max\limits_{[x_0, x_1]} |y(x)|$

Опр: Функционал $\Phi[y(x)]$ достиг на $y_0(x) \in \mathcal{M}$ лок min (max) на $\mathcal{M}$, если $\exists \varepsilon > 0$: $\forall y(x) \in \mathcal{M}$ вып: $\|y(x) - y(x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ $(\geq)$

Опр: max и min функц наз экстремумами. Задачи отыск экстрем. функций и функционалов наз задачами вариац. исчисл

Δ $\mathcal{M} = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1\}$

] $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx$ $(*)$, где $F(x,y,p)$ - зад ф-ция 3-х перемен

Опр: Ур-ем Эйлера наз $F'_y(x,y,p) - F''_{px}(x,y,p) = 0$ $(**)$

Теор о необх усл экстр для функцион, завис от 1-й производной:
] $x \in [x_0, x_1]$, $(y,p) \in \mathbb{R}^2$ для $F(x,y,p)$ $\exists$ непр втор частн. произвд. Если функционал $(*)$ достиг loc extr на $y_0(x) \in \mathcal{M}$, имеющей непр втор производ на $[x_0, x_1]$, то $y_0(x)$ явл реш диф ур-я $(**)$

$\triangleright$ Найдем вариац $(*)$ на $y_0(x)$. Из опр $\mathcal{M}$ $\Rightarrow$ допустим. вариац. $\delta y(x)$ ф-ции $y_0(x)$ явл $\forall$ непр диф на $[x_0, x_1]$ ф-ция, отобр в 0 на концах этого отр, то есть $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t(\delta y)')\,dx\Big|_{t=0} =$$

$= \int_{x_0}^{x_1} [F_y'(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t(\delta y)')\delta y + F_p'(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t(\delta y)')(\delta y)']dx \Big|_{t=0} =$

$= \int_{x_0}^{x_1} [F_y'(x, y_0, y_0')\delta y + F_p'(x, y_0, y_0')(\delta y)']dx$

Из теор о необ усл экстр (билет 18) $\Rightarrow$ вариац функц. на $y_0 = 0$, т.е

$\int_{x_0}^{x_1} [F_y'(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx}F_p'(x, y_0, y_0')]\delta y \, dx = 0$

Это р-во вып $\forall$ $\delta y \in C_0^1[x_0, x_1]$ $\Rightarrow$ {по осн лем. вар исчисл (билет 18)} $\Rightarrow$

$\Rightarrow F_y'(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx}F_p'(x, y_0, y_0') = 0$, $x_0 \leq x \leq x_1$ $\Rightarrow$ y_0 – реш (**) $\square$

20 Теор о необ усл экстремума для функционала, содержащ. производ высш. порядков

Δ мн-во M ф-ций $y(x) \in C^m[x_0, x_1]$:

$y(x_0) = y_{00}$, $y'(x_0) = y_{01}$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$

$y(x_1) = y_{10}$, $y'(x_1) = y_{11}$, ..., $y^{(n-1)}(x_1) = y_{1,n-1}$

Определим на M функционал $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$ (*), где $F(\ldots)$ опр и непр на $[x_0, x_1]$, $(y, y', \ldots, y^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Теор о необх усл экстр для функц, сод произв высш поряд

Пусть $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ имеет на $[x_0, x_1]$, $(y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непр частн производ порядка $2n$. Если $\bar{y}(x) \in M$, $\bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$ и явл реш ур-я:

$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{p_1} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n} = 0$, $x_0 \le x \le x_1$ (**), где $F = F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$

▷ В силу необх усл extr вариац функционала (*) на $\bar{y}$ должна обращ в 0 для ∀ допустим вариац $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$. По опр вар функц:

$\delta\Phi[\bar{y}, \delta y] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{y} + t\delta y]\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y} + t\delta y, \bar{y}' + t(\delta y)', \ldots, \bar{y}^{(n)} + (\delta y)^{(n)})\,dx\big|_{t=0}$

Диф инт по парам t, затем $t=0$ и приравн к 0 получ:

$\int_{x_0}^{x_1} (F'_y \delta y + F'_{p_1}(\delta y)' + \ldots + F'_{p_n}(\delta y)^n)\,dx = 0$

Инт по частям и учит, что $\delta y(x)$ и её производ обращ в 0 на концах: $\int_{x_0}^{x_1} (F'_y - \frac{d}{dx} F'_{p_1} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F'_{p_n})\delta y\,dx = 0$. Т.к. это р-во вып ∀ ф-ции $\delta y \in C_0^n[x_0, x_1]$, применяя осн лемму вар исчисл (билет 18) получ, что $\bar{y}(x)$ явл реш (**) ▷

(21) Теор о необх усл экстр для функц, завис от ф-ции 2-х пер.

Δ функцион, завис от $u(x,y)$ и её чп 1-го пор:

$$\Phi[u(x,y)] = \iint_D F(x,y,u,u'_x,u'_y)\,dxdy \quad (*)$$

, где $F(\ldots)$ задан ф-ция, D-область, огранич контуром L. ⅂ $F(\ldots)$ имеет непр втор чп при $(x,y)\in\bar{D}=D\cup L$

⅂ M - мн-во ф-ций $u(x,y)$, имеющих в $\bar{D}$ непр ч.п и приним на L задан знач $u(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in L$

Опр: вариац ф-ции $u(x,y)$, не выводящ её из M — ф-ция $\delta u(x,y)$ — имеющ в $\bar{D}$ непр ч.п и обр в 0 на L, т.е $\delta u(x,y)=0$, $(x,y)\in L$

Лемма: ⅂ ф-ция $f(x,y)$ непр в $\bar{D}$. Если $\iint_D f(x,y)v(x,y)\,dxdy=0$ $\forall$ ф-ции $v(x,y)$ имеющ непр чп в $\bar{D}$ и обр в 0 на L, то $f(x,y)=0$, $(x,y)\in\bar{D}$

▷ ⅂ $f(x,y)\neq 0$ в $\bar{D}$. $\Rightarrow \exists (x_0,y_0)\in D: f(x_0,y_0)\neq 0$. ⅂ $f(x_0,y_0)>0$. Из непр f в т (x_0,y_0):

$\exists$ круг $S=\{(x,y): (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}$: $f(x,y)\geq\frac{f(x_0,y_0)}{2}>0$ в $S\subset\bar{D}$

Δ $v_0(x,y)$: $v_0(x,y)=\begin{cases}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\varepsilon^2)^2, & \text{в } S\\ 0 & \text{в } \bar{D}\setminus S\end{cases}$

Тогда $\iint_D f v_0\,dxdy = \iint_S f v_0\,dxdy \geq \frac{f(x_0,y_0)}{2}\iint_S v_0\,dxdy > 0$ — ?! ◁

Теор о необх усл экстр для функц, завис от ф-ции 2-х перем:

⅂ $F(x,y,u,p,q)$ имеет непр втор чп при $(x,y)\in\bar{D}$, $(u,p,q)\in\mathbb{R}^3$. Если экстр функцион (***) достиг на $\bar{u}(x,y)\in M$, имеющ непр втор чп в $\bar{D}$, то она явл реш ур-я в чп: $F'_u-\frac{\partial F'_p}{\partial x}-\frac{\partial F'_q}{\partial y}=0$ (#)

▷ ⅂ extr функцион (***) достиг на $\bar{u}(x,y)\in M$, имеющ непр втор чп в $\bar{D}$. Из необх усл extr (билет 20) $\Rightarrow$ вариац функц (***) на этой ф-ции $=0$: $\delta\Phi[\bar{u},\delta u]=\frac{d}{dt}\Phi[\bar{u}+t\delta u]\big|_{t=0}=0$, т.е

$$\frac{d}{dt}\iint_D F(x,y,\omega(x,y,t),\omega'_x(x,y,t),\omega'_y(x,y,t))\,dxdy\Big|_{t=0}=0,$$ где $\omega=\bar{u}+t\delta u$.

Диф по t под зн. инт и $t=0$ имеем:

$$\iint_D F'_u(x,y,\bar{u},\bar{u}'_x,\bar{u}'_y)\,\delta u\,dxdy+\iint_D[F'_p(x,y,\bar{u},\bar{u}'_x,\bar{u}'_y)(\delta u)'_x+F'_q(x,y,\bar{u},\bar{u}'_x,\bar{u}'_y)(\delta u)'_y]\,dxdy=0 \quad (\#\#)$$

Преобразуем. Очев, что

$F'_p(\ldots)(\delta u)'_x=\frac{\partial}{\partial x}(F'_p\delta u)-\frac{\partial F'_p}{\partial x}\delta u$ $\Rightarrow$

$F'_q(\ldots)(\delta u)'_y=\frac{\partial}{\partial y}(F'_q\delta u)-\frac{\partial F'_p}{\partial y}\delta u$

$\Rightarrow \iint_D[F'_p(\ldots)(\delta u)'_x+F'_q(\ldots)(\delta u)'_y]\,dxdy=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(F'_p\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F'_q\delta u)\right)dxdy-\iint_D\left(\frac{\partial F'_p}{\partial x}-\frac{\partial F'_q}{\partial y}\right)\delta u$

Применяя ф-лу Грина (билет 10) к первому инт и $\delta u(x,y)=0$ на L:

$\iint\left(\frac{\partial}{\partial x}(F'_p\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F'_q\delta u)\right)dxdy = \oint_L (F'_p\delta u\, dy - F'_q \delta u\, dx) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \iint_D [F'_p(\ldots)(\delta u)'_x + F'_q(\ldots)(\delta u)'_y)dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial F'_p}{\partial x} + \frac{\partial F'_q}{\partial y}\right)\delta u\, dxdy$

и р-во (# #) приним вид $\iint_D (F'_u - \frac{\partial}{\partial x}F'_p - \frac{\partial}{\partial y}F'_q)\delta u\, dxdy = 0$, где

F'_u, F'_p, F_q вычисл в $(x, y, \bar{u}(x,y), \bar{u}'_x(x,y), \bar{u}'_y(x,y))$

Т.к получен. р-во верн $\forall$ допустим вар $\delta u(x,y) \Rightarrow$ {лемма 1} $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ф-ция $\bar{u}(x,y)$ — реш (#)

(22) Теор о необх усл экстр в сл. задачи на усл экстр

Δ 2 функцион:

$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ (*) где F, G − зад, дважды непр диф ф-ции

$\Psi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx$ (**)

Опр: ∃ треб найти $y(x)$, на кот достиг экстр (*) на $M_\Psi = \{ y \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ \Psi = l \}$ (***)

Вариац задачи такого типа − задачи на усл экстр

Теор: ∃ на $\bar{y}(x) \in M_\Psi$, $\bar{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$, достиг экстр функц (*) на M_Ψ. Если

∃ ф-ция $\delta y_0(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y_0(x_0) = \delta y_0(x_1) = 0$:

$\delta\Psi[\bar{y}, \delta y_0] \neq 0$, то $\exists \lambda$: $\bar{y}$ удовл ур-ю

$L_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} L_p(x, y, y') = 0$, $x_0 \le x \le x_1$ (#), где $L(x, y, p) = F(\ldots) - \lambda G(\ldots)$ (##)

▷

НУ ЭТО ДО СВИДАНИЯ

□

(23) Вариац. св-во с.зн и с.ф-ций задачи ШЛ

∀ задачу ШЛ. Треб найти λ: кр. зад $\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=-\lambda y & 0\le x\le l \\ y(0)=0 \end{cases}$ (*)

имеет нуl реш.

Введем усл $\int_0^l y_n^2(x)dx=1$ (**) (чтоб устран неоднозн)

∀ функцион $\Phi[y(x)]=\int_0^l \left(k(x)y'(x)\right)^2+q(x)y^2(x)\right)dx$ (***)

Покаж, что если $y_n(x)$ – соб ф зад ШЛ (*) соотв λ_n, то $\Phi[y_n(x)]=\lambda_n$

▷ $\int_0^l k(x)(y_n'(x))^2dx=\int_0^l k(x)y_n'\,y_n'dx = k(x)y_n'y_n\Big|_0^l-\int_0^l(k(x)y_n')'y_n\,dx=-\int_0^l(k\cdot y_n')'y_n\,dx\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi[y_n(x)]=\int_0^l(k(y_n')^2+q\,y_n^2)dx=-\int_0^l((k\cdot y_n')'-q\,y_n)y_n\,dx=\lambda_n\int_0^l y_n^2dx=\lambda_n$ □

∀ зад миним функц (***) на мн-ве ф-ций, удовл усл (*). Запиш кр усл в виде

$\Psi[y(x)]=1$, $\Psi[y(x)]=\int_0^l(y(x))^2dx$

∃ мин достиг на $\bar y(x)\in C^2[0,l]$. Из необх усл $\bar y(x)$ явл реш $L_y-\frac{d}{dx}L_p=0$

где $L(x,y,p)=k(x)p^2+q(x)y^2-\lambda y^2\Rightarrow 2q(x)y(x)-2\lambda y(x)-2(k(x)y'(x))'=0$

Опр: $\bar y(x)$ явл реш (*), $\bar y(x)\not\equiv 0$, т.к удовл (***) $\Rightarrow \bar y(x)$ явл соб ф зад ШЛ (*). Обозн её $y_1(x)$, λ_1 - соотв с.зн. Из $\Phi[y_n(x)]=\lambda_n\Rightarrow\Phi[y_1(x)]=\lambda_1$